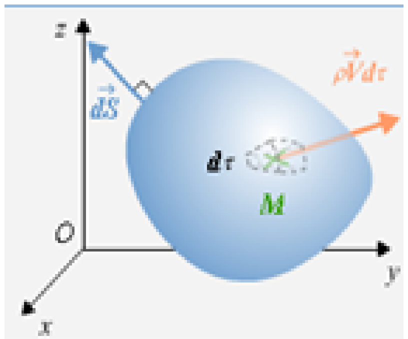
Formule de Bernouilli généralisée

Hypothèses

On considère l'écoulement d'un fluide **incompressible** en régime **non permanent** dans un volume τ. On appelle F la force volumique exercée par les parois mobiles d'une machine sur le fluide.

On écrit le principe fondamental de la dynamique :



$$\sum \overrightarrow{F} - \overrightarrow{grad}P = \rho \overrightarrow{a}$$

Soit en développant :

$$-\overrightarrow{grad}(P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}) + \overrightarrow{F} = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}$$

Démonstration

$$\iiint_{\tau} \vec{V} . \overrightarrow{grad}(P+\rho gz+\rho\frac{V^2}{2})\,d\tau \quad + \iiint_{\tau} \frac{\rho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}d\tau = \iiint_{\tau} \vec{F}.\vec{V}\,d\tau$$

Avec l'égalité vectorielle $div(f\,\vec{A}) = f div\,\vec{A} + \vec{A}\,\overrightarrow{grad}\,f$ (vraie pour f une fonction scalaire et $\vec{A}$ un champs de vecteurs) appliquée à

$$f = (P+\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz) \qquad \vec{A} = \vec{V}$$

On obtient :

$$div((P+\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz)\vec{V}) = \vec{V}\,\overrightarrow{grad}(P+\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz)$$

$$\iiint_{\tau} div((P+\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz)\vec{V})\,d\tau \quad + \iiint_{\tau} \frac{\rho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}d\tau = \dot{W}$$

$$\boxed{\oiint_{S}(P+\rho gz+\rho\frac{V^2}{2})\vec{V}\,\vec{dS}} \quad + \iiint_{\tau} \frac{\rho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}d\tau = \boxed{\dot{W}}$$

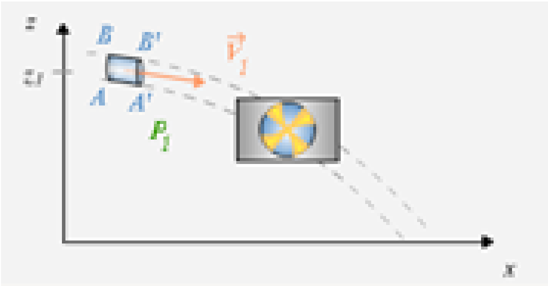
Débit d'énergie sortant de la surface S   Puissance mécanique fournie au fluide

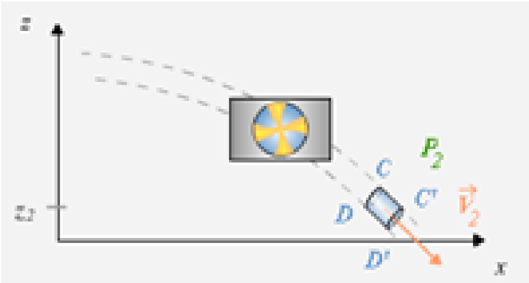
Fluide traversant une machine hydraulique

Hypothèses

Considérons un fluide parfait, en écoulement permanent, au niveau de la machine. Les parois fournissent au fluide une énergie mécanique volumique W ($J.m^{-3}$), les échanges de chaleur sont négligés.

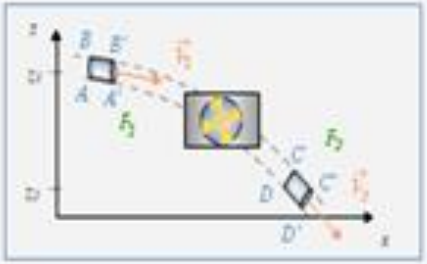
On considère à l'instant t un filet de courant ABB'A' d'un fluide incompressible, dans le champ de pesanteur et traversant la machine hydraulique.





A l'instant t+dt, le fluide se trouve en CDD'C'.

Démonstration



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au filet de courant entre les instants t et t+dt :

$$\frac{1}{2}dm(V_2^2 - V_1^2) = dmg(z_1 - z_2) + (P_1 - P_2)d\tau + Wd\tau$$

Avec $dm = \rho d\tau$, on obtient après simplification :

$$P_2 + \rho g z_2 + \rho\frac{V_2^2}{2} = P_1 + \rho g z_1 + \rho\frac{V_1^2}{2} + W$$

W<0 machine réceptrice

W>0 machine génératrice

Interprétation :

L'énergie du fluide après la machine est égale à celle avant celle ci plus l'énergie fournie par la machine.

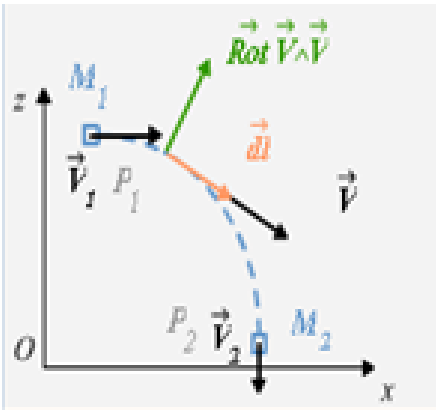
Cas des écoulements non permanents

On considère l'écoulement d'un fluide parfait, les forces de volume agissant dérivent d'un potentiel, l'écoulement est non permanent.

On écrit l'équation d'Euler :

$$\sum \overrightarrow{F} - \overrightarrow{grad}P = \rho \overrightarrow{a}$$

En tenant compte des hypothèses, et en développant l'expression de l'accélération, on obtient :



$$\overrightarrow{grad}\left(P+\rho g z+\rho\frac{V^2}{2}\right)+\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=\rho\,\overrightarrow{rot}\vec{V}\wedge\vec{V}$$

On calcule la circulation de l'expression précédente entre M_1 et M_2.

Cas particulier

Cas où la section du filet de courant est constante :

Le fluide est incompressible, il y a donc conservation du débit en volume ($\overrightarrow{div}\vec{V}=0$), comme la section est constante, la vitesse l'est également : $\vec{V_1}=\vec{V_2}$. A chaque instant $\vec{V}$et $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ont la même valeur le long de la ligne de Courant.

$$P_2+\rho g z_2+\rho l\frac{\partial V}{\partial t}=P_1+\rho g z_1$$