Cours 08 : Equation dynamique relative au fluide parfait

Relation de Bernoulli

Les hypothèses de calcul

On considère :

- un fluide parfait (sans viscosité)

- incompressible (ρ = cste)

- en écoulement permanent (les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles)

- la densité de force volumique dérive d'un potentiel U

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$$

- les parois limitant le fluide sont fixes (pas de travail fourni) et adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec l'extérieur).

Première approche : équation dynamique

Dans cette première approche, on part de l'équation dynamique (l'équation d'Euler) et on tient compte des hypothèses :

$$\vec{F} - \overrightarrow{grad}P = \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho\overrightarrow{grad}\frac{\vec{V}^2}{2} + \rho\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Reprenons les hypothèses :

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U \leftrightarrow$ les forces de volume dérivent d'un potentiel

$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = 0 \leftrightarrow$ le mouvement est permanent

$\frac{\rho}{2}\overrightarrow{grad}\vec{V}^2 = \overrightarrow{grad}(\frac{\rho\vec{V}^2}{2}) \leftrightarrow$ le fluide est incompressible

Démonstration

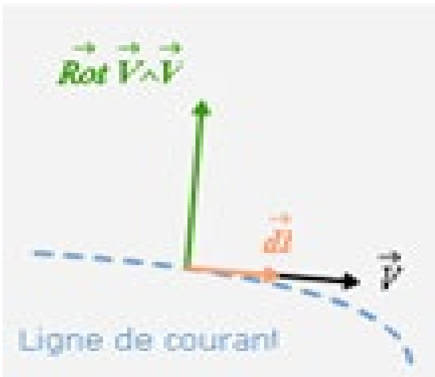
On obtient en remplaçant dans l'équation dynamique :

$$-\overrightarrow{grad}(P + U + \rho\frac{\vec{V}^2}{2}) = \rho\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Considérons une ligne de courant et prenons la circulation élémentaire des deux termes précédents :

$$-\overrightarrow{grad}(P + U + \rho\frac{V^2}{2}).\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}.\overrightarrow{dl}$$

On remarque que le deuxième terme est nul ($\overrightarrow{V}$ $\overrightarrow{dl}$et sont colinéaires).



Résultat

On obtient donc :

$$\overrightarrow{grad}(P + U + \rho\frac{V^2}{2}).\overrightarrow{dl} = 0$$

En utilisant le théorème du gradient, il vient :

$$d(P + U + \rho\frac{V^2}{2}) = 0 \Rightarrow P + U + \rho\frac{V^2}{2} = cste$$

L'analyse du résultat montre que l'unité est le pascal (soit le joule par mètre cube). La somme de ces trois termes représente donc l'énergie mécanique du fluide par unité de volume et celle ci est constante le long d'une ligne de courant.

En général, les forces de volume sont les forces de pesanteur et le potentiel U s'écrit U = ρgz avec g l'accélération de la pesanteur et z la position de la particule de fluide considérée.

Conclusion

La relation de Bernoulli s'écrit donc :

$$P + \rho\frac{V^2}{2} + \rho g z = cste$$

Elle s'applique, dans le cas de fluide parfait, incompressible en mouvement permanent, dans le cas où les forces de volume sont les forces de pesanteur avec des parois fixes et sans échange de chaleur avec l'extérieur.

Signification physique : c'est une équation de conservation de l'énergie

Le premier terme représente le travail des forces de pression (par unité de volume).

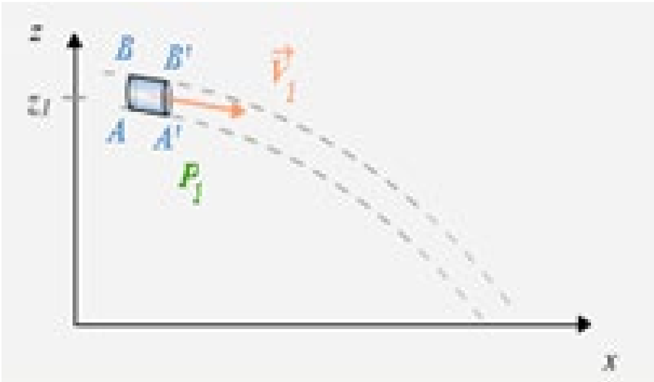
Le deuxième terme représente l'énergie cinétique (par unité de volume).

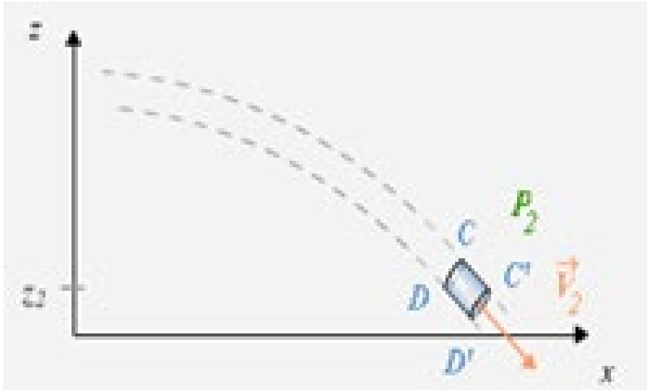
Le troisième terme représente l'énergie potentielle de situation (par unité de volume).

Deuxième approche : Conservation de l'énergie

Théorème de l'énergie cinétique

Comme nous l'avons vu précédemment, la relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement, voyons comment retrouver le résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.





Les hypothèses concernant le fluide et l'écoulement sont les mêmes. On considère un filet de courant ABA'B' à l'instant t. A t + dt, le filet passe en CDC'D'.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au filet de courant entre les instants t et t + dt :

$$\frac{1}{2}dm(V_2^2 - V_1^2) = dmg(z_1 - z_2) + (P_1 - P_2)d\tau$$

dτ = ABB'A' = CDC'D' et dm = ρdτ

On obtient donc :

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

On retrouve bien les trois termes indiquant la conservation de l'énergie mécanique du fluide : **énergie cinétique, énergie potentielle de situation et énergie de pressio n** (toujours par unité de volume).

Autres écritures de l'équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli peut s'écrire sous d'autres formes :

a- En divisant tous les termes par ρ, l'unité des différents termes de l'équation devient le joule par kilogramme :

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = cste(\text{ J.kg}^{-1})$$

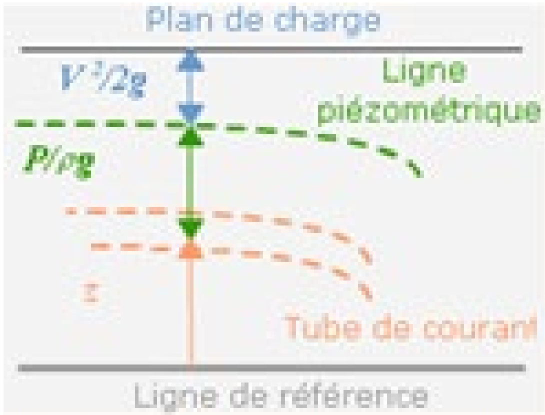
b- En divisant tous les termes de l'équation par ρg, l'unité des différents termes devient le mètre :

$$\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = h = cste\ (\text{m})$$

Interprétation graphique

Dans le langage des mécaniciens des fluides, l'énergie mécanique du fluide représentée par **la somme des trois termes de la relation de Bernoulli** est appelée **charge de l'écoulement.**

L'écriture de la relation de Bernoulli en mètre montre que l'on peut faire une interprétation graphique :



z est la hauteur caractérisant le point choisi (par rapport à une référence).

P / ρg est la hauteur caractérisant une colonne de fluide mesurant la pression.

V^2 / 2g est la hauteur cinétique : c'est la hauteur d'où doit tomber une particule de fluide pour acquérir la vitesse $V = (2gh)^{1/2}$.

Remarque : Cas des fluides réels

Pour les fluides réels (ayant une viscosité), la ligne de charge ne sera pas horizontale mais décroissante, cette décroissance indiquera les pertes de charge dans le champ de l'écoulement (les pertes d'énergie). La mise en évidence et le calcul des pertes de charge seront étudiés lors du prochain chapitre.

Remarque : Cas des gaz

Pour des vitesses ne dépassant pas 0.3 fois la vitesse du son, on peut admettre que ρ = cste. En outre, l'énergie liée aux variations de côtes sont souvent négligeables (par rapport aux autres termes). On néglige donc le terme ρgz dans l'équation de Bernoulli.