Cours 07 : Dynamique des fluides parfaits

Introduction

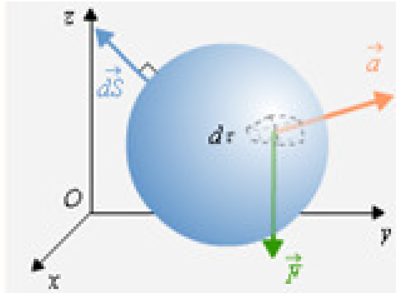
Dans ce chapitre, on ne considère que des fluides dont on peut négliger la viscosité; il n'y a pas de frottements entre les différentes couches de fluides; ces fluides sont dits parfaits.

Equation locale

Forme générale

Sur chaque élément de volume de fluide, on définit :

- ρ la masse volumique.
- $\vec{F}$ la densité volumique de force.
- $\vec{a}$ l'accélération par rapport au référentiel galiléen O, x, y, z.



Ecriture de l'équation intégrale

Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique relativement au référentiel Galiléen O,x ,y,z :

$$\iiint_\tau \vec{F}\, d\tau + \iint_S -P\vec{dS} = \iiint_\tau \rho\, \vec{a}\, d\tau$$

En utilisant la formule du gradient :

$$\iint_S -P\vec{dS} = \iiint_\tau -\overrightarrow{grad}P\, d\tau$$

On obtient :

$$\iiint_\tau (\vec{F} - \overrightarrow{grad}P - \rho\, \vec{a})\, d\tau = 0$$

La relation précédente est vraie quelque soit l'élément de volume choisi, on peut donc écrire :

$$\vec{F} - \overrightarrow{grad}P - \rho\vec{a} = 0$$

Cette équation représente la forme locale de l'équation d'Euler (vraie en chaque point du fluide).

A partir du bilan des forces appliquées au fluide et des caractéristiques cinématiques de l'écoulement, c'est cette équation qui nous servira pour l'étude des écoulements.

Autres expressions de l'équation d'Euler

Dans l'équation précédente, l'accélération du fluide s'écrit (cinématique des fluides) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\overrightarrow{grad})\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\vec{V}^2 + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Dans cette expression :

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ est l'accélération locale (non permanence de l'écoulement).

$1/2\,\overrightarrow{grad}\,\overrightarrow{V^2} + \overrightarrow{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$ est l'accélération convective (non uniformité de l'écoulement).

Remarques

Une équation dynamique est insuffisante pour une étude complète d'un écoulement.

Les caractéristiques de l'écoulement d'un fluide sont données par :

1. **la vitesse V**
2. **la pression P**
3. **la masse volumique** ρ
4. **la température T**

L'équation d'Euler doit donc être complétée par d'autres équations caractérisant le fluide, son mouvement et les conditions d'écoulement.

Eléments à ajouter

Il faut donc ajouter :

- l'équation de conservation de la masse

$\mathrm{div}(\rho\overrightarrow{V}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho Q$ avec Q le débit volumique de production

- l'équation d'état du fluide : $f(P,\rho,T) = 0$

- l'équation caractérisant le type de transformation subie par le fluide (**incompressible, isotherme, adiabatique...**).

- les conditions aux limites et les conditions initiales qui permettent de déterminer les constantes d'intégration.

Exemple : Équation caractéristique du fluide

$$f(P,\rho,T) = 0$$

- liquide incompressible : $\rho = f(T)$

- liquide légèrement compressible : $\rho = \rho_0(T)(1 + kP)$

- Gaz parfait : $\frac{P}{\rho} = rT$

Attention : Transformations subies

Dans le cas de transformations réversibles :

Pour les isothermes : $\rho = cste$ (**fluide incompressible**) et $\frac{P}{\rho} = cste$ (**gaz parfait**).

Pour les transformations adiabatiques : $\rho = cste$ (**fluide incompressible**) et $\frac{P}{\rho^{\gamma}} = cste$ (**gaz parfait**).

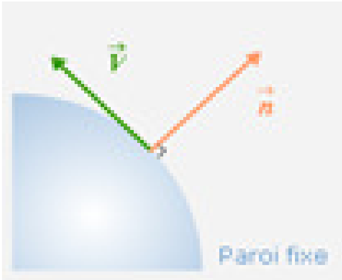
Exemple : Conditions aux limites

Elles sont définies par des parois fixes ou mobiles ou par des surfaces libres.

Paroi fixe

L'équation de la paroi est donnée par : F(x, y, z) = 0

En fluide parfait la vitesse est nécessairement orthogonale à la paroi; cette normale est définie par le gradient de la fonction F(x,y,z); la condition aux limites s'écrit donc :



$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

v_i est la projection de la vitesse sur x, y ou z et le deuxième terme représente les coordonnées du gradient de F.

Paroi mobile

On ajoute simplement à l'équation précédente le terme dépendant du temps, soit :

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Surface libre $P = constante$