Cours06 : Ecoulement à potentiel des vitesses

Ecoulement à potentiel des vitesses

Rappels

Hypothèses : on se place dans le cas d'un fluide parfait incompressible en écoulement plan irrotationnel et permanent.

Dans ce cas, la vitesse dérive du potentiel Φ

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\Phi$$

Et l'équation de continuité s'écrit :

$$\Delta\Phi = 0$$

Pour connaître l'écoulement (ligne de courant, vitesse), il faut donc résoudre l'équation de Laplace. Pour les écoulements à deux dimensions, la méthode des potentiels complexes, décrites ci-dessous, est très fructueuse.

Conditions de Cauchy - Riemann

Soit f(z) la fonction de la variable complexe x + i y, f(z) est dérivable sur un domaine D si, dans le plan complexe :

$$lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ tend vers une limite finie} \frac{df(z)}{dz}$$

On peut mettre f(z) sous la forme :

$$f(z) = \Phi + i\Psi$$

Où Φ est la fonction potentielle et ψ la fonction courant

Calcul de la dérivée

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d\Phi + id\Psi}{dx + idy}$$

Pour que f soit analytique (Φ et Ψ satisfont à l'équation de Laplace), cette dérivée doit être indépendante de dz, soit, en développant :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy) + i(\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy)}{dx + idy}$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d\Phi + id\Psi}{dx + idy}$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x})dx + (\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{1}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y})idy}{dx + idy}$$

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{1}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y}}$$

Fonction holomorphe

La condition d'indépendance implique que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

On obtient donc les relations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = u \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = v \end{cases}$$

u et v sont les composantes de la vitesse.

Ce sont les conditions de Cauchy Riemann : On dit que la fonction f(z) est holomorphe sur le domaine D