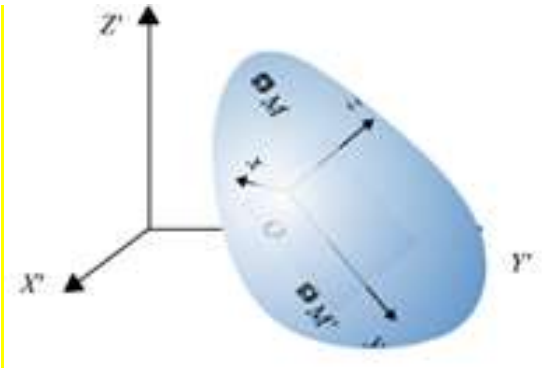
Cours05 : Vitesse, accélération-Ecoulement irrotationnel

Cas du fluide – Vecteur tourbillon et tenseur des taux de déformation

Soit un élément de volume dt et deux points M et M' infiniment voisins. Dans le repère O, x, y, z les coordonnées de M et M' sont :



M(x, y, z) et M'(x+dx, y+dy, z+dz)

Expression de la vitesse

Les coordonnées de la vitesse sont :

$$\overrightarrow{V_M}(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{V'_M}\left|\begin{array}{l} u(x+dx,y+dy,z+dz) \\ v(x+dx,y+dy,z+dz) \\ w(x+dx,y+dy,z+dz) \end{array}\right.$$

Nous allons simplement exprimer les coordonnées de la vitesse en M' en utilisant la formule des accroissements finis. Par exemple pour la composante suivant x :

$$u(x+dx,y+dy,z+dz,t) = u(x,y,z,t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$v_i(M') = v_i(M) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j$$

*v*i représente une composante de la vitesse au point M'

Sous forme vectorielle, on peut écrire

$$\overrightarrow{V'_M} = \overrightarrow{V_M} + (\overrightarrow{MM'}.\vec{\nabla})\overrightarrow{V_M}$$

Pour comparer l'expression précédente avec celle du fluide parfait et mettre en évidence la signification des différents termes, développons et calculons

$$\overrightarrow{grad}(\vec{V}.\overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{MM'}.\vec{\nabla})\vec{V} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{V} + \vec{V} \wedge \overrightarrow{rot}\overrightarrow{MM'}$$

On obtient donc :

Tenseur des taux de déformation

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ Tenseur symétrique}$$

Pour mettre en évidence la signification physique des différents termes, écrivons la vitesse sous la forme :

$$\overrightarrow{V'_M} = \overrightarrow{V_M} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'} + \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MM'}$$

Remarque : si $\overline{\overline{D}} = 0$, le taux de déformation est nul et l'on se ramène au cas du solide parfait indéformable (ou au cas d'un milieu déformable en équilibre absolu relatif)

Voyons le sens physique des différents termes

$\overrightarrow{V_M}$: Représente une translation d'ensemble de l'élément de volume

$\overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MM'}$représente la déformation de l'élément de volume

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$: est le moment par rapport à M' du vecteur 1/2 $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V_M}$; c'est la répartition des vitesses lors d'une rotation en bloc de l'élément de volume autour d'un axe passant par M

Accélération

Expression de l'accélération

Soit $\vec{a}$ le vecteur accélération, par définition, on a :

$$\overrightarrow{a_{M,t}} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\vec{V}_{M+dM,t+\Delta t} - \vec{V}_{M,t}}{\Delta t}$$

Dans le repère considéré, $\vec{v}$ a les coordonnées :

$$\vec{V}(u(x,y,z,t); v(x,y,z,t); w(x,y,z,t))$$

Prenons la coordonnée de la vitesse suivant l'axe x et calculons sa différentielle :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

Cette expression permet de calculer la composante de l'accélération sur l'axe x :

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Forme vectorielle

On peut écrire l'expression précédente :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

On peut écrire le même type de relation pour les composantes suivant y et z, on obtient donc une relation vectorielle :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}$$

Autre écriture

En utilisant une égalité vectorielle, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 1/2\,\overrightarrow{grad}\,\vec{V}^2 + \overrightarrow{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Interprétation physique :

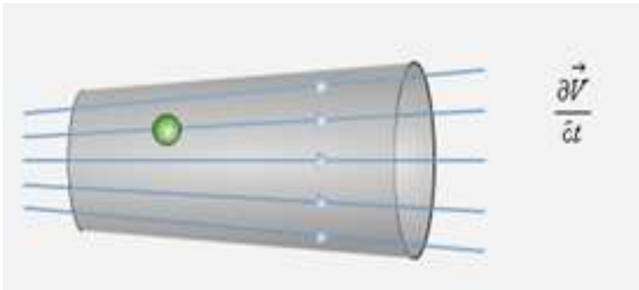
$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ **est appelé accélération locale, ce terme traduit la non permanence de l'écoulement, il est nul pour un écoulement permanent.**

Accélération convective

$(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} = 1/2\overrightarrow{grad}\vec{V^2} + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$: **est l'accélération convective, ce terme traduit la non uniformité de l'écoulement.**

Pour vérifier si un écoulement est permanent, on se place en un point fixe de l'écoulement et on mesure la vitesse à des instants différents.

Pour voir si un écoulement est uniforme, on mesure la vitesse en différents points de l'écoulement, au même instant.



Exercice

1- A partir de la définition de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, retrouver l'équation de conservation de la masse pour un écoulement conservatif

2- Traiter le cas particulier du régime permanent dans le cas d'un écoulement à potentiel des vitesses $V = \overrightarrow{\mathrm{grad}\Phi}$

Indication : on exprimera que la masse du fluide est invariante dans son mouvement

Ecoulement irrotationnel

Définition : Ecoulement irrotationnel

On appelle écoulement irrotationnel un écoulement pour lequel on a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$$

De cette équation, on déduit immédiatement :

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\Phi$$

Un écoulement irrotationnel est un écoulement à potentiel des vitesses et réciproquement

Équation de continuité

$$\mathrm{div}\rho\vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Pour un fluide incompressible et un écoulement irrotationnel, on obtient :

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0 \text{ soit } \mathrm{div}(\overrightarrow{grad}\Phi) = 0$$

Donc

$$\boxed{\Delta\Phi = 0}$$

Expression de l'accélération

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 1/2\,\overrightarrow{grad}\,\vec{V}^2$$

Le terme $\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$ est nul

Définition : Ecoulement rotationnel et vecteur tourbillon

Le vecteur tourbillon représente le vecteur vitesse de rotation instantanée

$$\vec{\omega} = 1/2\,\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$$

Définition : Ligne tourbillon

On appelle ligne tourbillon une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon, elle est telle que :

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

Définition : Tube tourbillon

On appelle tube tourbillon, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur un contour fermé

Propriétés

Par définition, le champ des vecteurs tourbillon est à flux conservatif

$$\vec{\omega} = 1/2\,\overrightarrow{rot}\,\vec{V} \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0$$
$$\Rightarrow \iint_S \vec{\omega}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

Conséquence : le flux du vecteur tourbillon est constant dans un tube tourbillon.

On appelle intensité du tube tourbillon la quantité :

$$I = \iint_S \vec{\omega}\,\overrightarrow{dS}$$
$$\iint_S \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{dS} = \oint \vec{V}\,\vec{dl} = \iint_S 2\vec{\omega}\,\overrightarrow{dS} = 2I$$