# Ecoulement conservatif

## Écoulement conservatif (sans production de fluide)

Faisons le bilan des masses :

Masse totale sortant de la surface S par unité de temps:

$$\iint_S \overrightarrow{j}\,\overrightarrow{dS} = \iiint_\tau \operatorname{div}\overrightarrow{j}\,d\tau$$

Dans l'élément de volume $d\tau$et pendant le temps dt, la variation de masse est égale à :

$$[\rho(x,y,z,t+dt) - \rho(x,y,z,t)]d\tau = \frac{\partial \rho}{\partial t}dt d\tau$$

Dans le volume $\tau$et pendant l'unité de temps, il s'accumule :

$$\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}d\tau$$

Donc au total :

$$\iiint_\tau (\operatorname{div}\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t})d\tau = 0 \;\; \forall\; d\tau$$

**Cette équation représente la forme globale ou intégrale du principe de conservation de la masse**

On considère que dans le volume V il n'y a pas de discontinuité et que l'élément de volume est quelconque, on peut donc écrire :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

**Cette équation représente la forme locale du principe de conservation de la masse.**

## Equation locale et régime permanent

## Régime permanent

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ d'où $\operatorname{div}(\rho \overrightarrow{v}) = 0$

L'équation obtenue indique que le flux de $\rho.v$ à travers une surface fermée est nul

$\iiint_\tau \operatorname{div}(\rho \overrightarrow{v}) d\tau = \iint_S \rho \overrightarrow{v} \overrightarrow{dS} = 0$

**Cette équation signifie donc la conservation du débit massique.**

## Cas du fluide incompressible

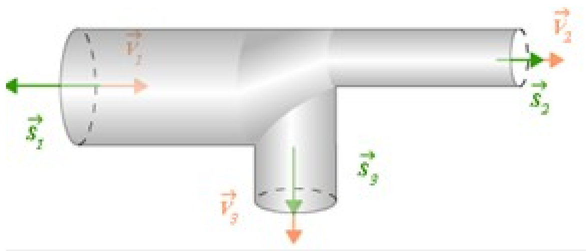
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = cst$$

$$div\,\overrightarrow{v} = 0$$

Donc le flux de la vitesse à travers une surface fermée est nul

$$\iiint_{\tau} \mathrm{div}\,\overrightarrow{v}\,d\tau = \iint_{S} \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

**L'équation représente la conservation du débit en volume pour un fluide incompressible**



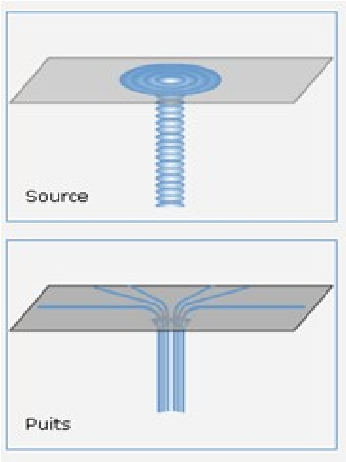
## Ecoulement avec production de masse

**Equation de conservation de la masse avec production de masse dans l'écoulement**

Il suffit d'ajouter le terme de production de masse dans l'équation bilan pour obtenir l'équation locale :

$$\mathrm{div}\rho\vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho q'$$

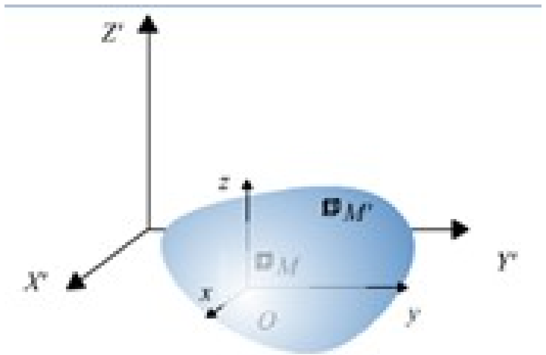
Dans cette équation, q' représente débit massique de production (en $s^{-1}$) $q' > 0$, représente une source et $q' < 0$ un puits.



## Champ des vitesses

Cas du solide parfait (indéformable) - rappels

$$\overrightarrow{V'_M} = \overrightarrow{V_M} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$$



$\vec{\omega}$ Est le vecteur rotation et :

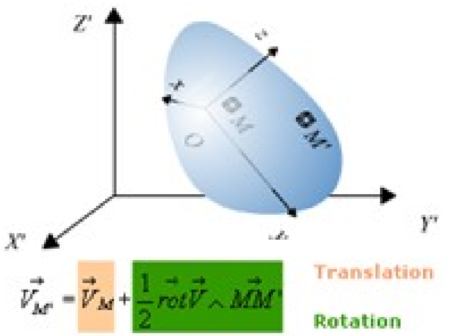
$$\overrightarrow{V_M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

En calculant $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V_M}$, on peut écrire $\overrightarrow{V'_M}$ sous la forme

$$\overrightarrow{V'_M} = \overrightarrow{V_M} + 1/2\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \overrightarrow{MM'}$$

## Interprétation physique

Le premier terme de l'expression de la vitesse représente une translation et le deuxième une rotation du solide.



Le terme 1 /2 $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V_M} = \vec{\omega}$ où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation.

## cas du fluide – Vecteur tourbillon et tenseur des taux de déformation

Soit un élément de volume dt et deux points M et M' infiniment voisins. Dans le repère O, x, y, z les coordonnées de M et M' sont :

M(x, y, z) et M'(x+dx, y+dy, z+dz)

## Expression de la vitesse

Les coordonnées de la vitesse sont :

$$\overrightarrow{V_M}(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{V'_M}\left|\begin{array}{l} u(x+dx, y+dy, z+dz) \\ v(x+dx, y+dy, z+dz) \\ w(x+dx, y+dy, z+dz) \end{array}\right.$$

Nous allons simplement exprimer les coordonnées de la vitesse en M' en utilisant la formule des accroissements finis. Par exemple pour la composante suivant x :

$$u(x+dx, y+dy, z+dz, t) = u(x, y, z, t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$v_i(M') = v_i(M) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

vi représente une composante de la vitesse au point M' Sous forme vectorielle, on peut écrire :

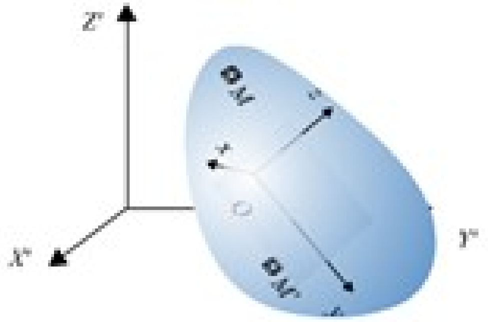
$$\overrightarrow{V'_M} = \overrightarrow{V_M} + (\overrightarrow{MM'}.\vec{\nabla})\overrightarrow{V_M}$$

Pour comparer l'expression précédente avec celle du fluide parfait et mettre en vidence la signification des différents termes, développons et calculons

$$\overrightarrow{grad}(\vec{V}.\overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{MM'}.\vec{\nabla})\vec{V} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{V} + \vec{V} \wedge \overrightarrow{rot}\overrightarrow{MM'}$$

On obtient donc :

# Tenseur des taux de déformation



$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ Tenseur symétrique}$$

Pour mettre en évidence la signification physique des différents termes, écrivons la vitesse sous la forme :

$$\overrightarrow{V'_M} = \overrightarrow{V_M} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'} + \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MM'}$$

Remarque : si $\overline{\overline{D}} = 0$, le taux de déformation est nul et l'on se ramène au cas du solide parfait indéformable (ou au cas d'un milieu déformable en équilibre absolu relatif)

**Voyons le sens physique des différents termes**

$\overrightarrow{V_M}$: Représente une translation d'ensemble de l'élément de volume

$\overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MM'}$ représente la déformation de l'élément de volume

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$: est le moment par rapport à M' du vecteur 1/2 $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V_M}$; c'est la répartition des vitesses lors d'une rotation en bloc de l'élément de volume autour d'un axe passant par M

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$: est le moment par rapport à M' du vecteur 1/2 $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V_M}$; c'est la répartition des vitesses lors d'une rotation en bloc de l'élément de volume autour d'un axe passant par M