

## Chapitre 3 : Méthodes numériques pour l'analyse des écoulements souterrains

### 3.1 Méthodes de résolution des problèmes d'écoulement des eaux souterraines,

Les problèmes d'écoulement des eaux souterraines (hydraulique souterraine) consistent à déterminer la distribution des charges hydrauliques et des vitesses dans un aquifère. Leur résolution repose sur trois grandes familles de méthodes : analytiques, numériques et expérimentales.

#### 3.1.1 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques constituent une approche fondamentale en hydraulique souterraine pour décrire et quantifier les écoulements dans les aquifères. Elles reposent sur la résolution exacte des équations différentielles gouvernant l'écoulement des eaux souterraines, sous un ensemble d'hypothèses simplificatrices. Ces méthodes permettent notamment :

- d'interpréter les essais de pompage
- d'estimer les paramètres hydrodynamiques (T, K, S)
- de comprendre les mécanismes d'écoulement

**Principe** : Solutions exactes dérivées mathématiquement pour des géométries simples et des conditions homogènes/isotropes.

**Applications** :

- Écoulement permanent (équation de Thiem pour les puits).
- Écoulement transitoire (solution de Theis pour la diffusion de la nappe).

#### A. Équation générale de l'écoulement souterrain

L'écoulement des eaux souterraines est gouverné par la combinaison de :

- la loi de Darcy
- la conservation de la masse

##### A.1 Régime permanent (équation de Laplace)

Lorsque  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$  :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

##### A.2 Équation en régime transitoire

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)$$

Avec :

- $h(x, y, t)$  : charge hydraulique (m)
- $T = K \cdot b$  : transmissivité (m<sup>2</sup>/s)
- $S$  : coefficient d'emmagasinement <sup>2</sup>

## Exercices de la méthode analytique

### Exercice 1: Régime permanent

Un puits capte une nappe captive dont les caractéristiques sont:

- Débit :  $Q = 0,002 \text{ m}^3/s$ .
- Conductivité :  $K = 10^{-4} \text{ m/s}$
- Épaisseur :  $b = 20 \text{ m}$
- Rayon d'influence :  $R = 100 \text{ m}$
- Distance :  $r = 10 \text{ m}$
- Charge à  $R$ :  $h(R) = 15 \text{ m}$

Calculer la charge  $h(r)$  en utilisant la solution de Thiem (régime permanent)

### Corrigé

#### Formule de Thiem (1906)

$$\Delta s = \frac{Q}{2\pi K b} \ln \frac{R}{r}$$

$$\Delta s = h(R) - h(r)$$

$$h(r) = h(R) - \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r}$$

- Calcul du coefficient :  $2\pi K b = 2\pi \times 10^{-4} \times 20 = \mathbf{0,01257}$

- Terme logarithmique :  $\ln \frac{R}{r} = \ln(10) = \mathbf{2,303}$

- Calcul final:  $h(r) = 15 - \frac{0,002}{0,01257} \times 2,303 = 15 - (0,159 \times 2,303)$

$$\mathbf{h(r) \approx 14,63 \text{ m}}$$

$$\Delta s = 15 - 14,63 = 0,37 \text{ m}$$

### Exercice 2 : régime transitoire

Un essai de pompage a été effectuée dans ouvrage de captage (puits, forage) représentant les caractéristiques suivantes:

- $Q = 0,001 \text{ m}^3/s$
- $T = 10^{-3} \text{ m}^2/s$
- $S = 10^{-4}$
- $r = 50 \text{ m}$
- $t = 1 \text{ jour} = 86400 \text{ s}$

- Calculer le rabattement  $s(r, t)$  en utilisant la solution de Theis en régime transitoire.

### Corrige

Formule de Theis (1935) :  $\mathbf{s(r)} = \frac{Q}{4\pi T} \mathbf{W(u)}$  avec  $\mathbf{u} = \frac{r^2 S}{4Tt}$

Calcul du paramètre ( $\mathbf{u}$ ) :

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} = \frac{50^2 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-3} \times 84600} = \frac{0,25}{345,6}$$

$$\mathbf{u \approx 7,2 \times 10^{-4}}$$

### Fonction puits

Pour petit  $u$  :  $W(u) \approx -\ln(u) - 0,577 \approx -\ln(7,2 \times 10^{-4}) - 0,577$

$$\mathbf{W(u) = 7,23 - 0,577 = 6,65}$$

Rabattement :

$$s(r) = \frac{q}{4\pi T} W(u)$$

$$4\pi T = 0,01257$$

$$s(50) = \frac{0,001}{0,01257} \times 6,65 = 0,0796 \times 6,65$$

$$\mathbf{s(50) = 0,53 m}$$

### 3.1.2. Méthodes numériques

- ☑ **Différences finies (FDM) :**
  - Discrétisation du domaine en grille régulière.
  - Approximation des dérivées par des différences.
  - Logiciels : MODFLOW (standard en hydrogéologie).
- ☑ **Éléments finis (FEM) :**
  - Maillage flexible (géométries complexes).
  - Résolution via fonctions de base.

#### A. La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) régissant les écoulements souterrains. Elle repose sur la discrétisation du domaine et le remplacement des dérivées par des approximations aux différences finies.

##### A.1 Équations Gouvernantes

Pour un écoulement transitoire en milieu poreux saturé (aquifère captif), l'équation de diffusion est :

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + Q$$

où :

- $h$  : charge hydraulique,
- $S$  : coefficient d'emmagasinement,
- $T$  : transmissivité,
- $Q$  : terme source/puits.

##### A.2 Discrétisation

- **Espace** : Le domaine est divisé en grille régulière avec pas  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ .
- **Temps** : Discrétisé en pas  $\Delta t$ . Les indices  $i, j$  désignent la position spatiale et  $n$  le temps.

**Approximation des Dérivées :**

- **Dérivée temporelle** (schéma explicite) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t}$$

- **Dérivées spatiales** (différences centrées) :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta^2}$$

##### A.3 Schéma Numérique Explicite

En substituant dans l'EDP :

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \frac{T\Delta t}{S\Delta^2} h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n - 4h_{i,j}^n + \frac{Q_{i,j}^n\Delta t}{S}$$

**Condition de Stabilité :**

$$\Delta t \leq \frac{\Delta^2 S}{4T}$$

#### A.4 Schéma Implicite

Les termes spatiaux sont évalués au temps  $n + 1$ , menant à un système linéaire  $Ah^{n+1} = b$ . Stable pour tout  $\Delta t$ , mais nécessite des solveurs matriciels (ex. Gauss-Seidel).

#### A.5 Conditions aux Limites

- **Dirichlet** :  $n$  fixé (ex. rivière).
- **Neumann** : Flux imposé (ex. frontière imperméable :  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ ). Utilise des nœuds fictifs ou différences asymétriques.

#### A.6 Cas Stationnaire

En régime permanent ( $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ ), l'équation devient elliptique :

$$T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + Q = 0$$

Discrétisation :

$$h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} + \frac{Q_{i,j}\Delta^2}{T}}{4}$$

## Exercices de la méthode des différences finies

### Exercice 1 : Écoulement 1D en régime permanent

On considère un écoulement d'eau souterraine horizontal unidimensionnel dans un aquifère homogène.

**Données :**

- Longueur du domaine :  $L=10$  m
- Conductivité hydraulique :  $K = 10^{-4}$  m/s
- Pas spatial :  $\Delta x = 5$  m
- Conditions aux limites :  $h(0) = 10$  m ;  $h(10) = 5$  m

Déterminer la charge hydraulique au point intérieur en utilisant la méthode des différences finies.

### Corrigé 1

#### 1. Équation de base

En régime permanent sans recharge :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

#### 2. Discrétisation (différences finies)

On utilise l'approximation :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_{i+1,j} - 2h_i + h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Donc :

$$h_{i+1,j} - 2h_i + h_{i-1,j} = 0$$

#### 3. Maillage

On divise le domaine :

Point	Position (m)	Charge
1	0	$h_1 = 10$
2	5	$h_2 = ?$
3	10	$h_3 = 5$

#### 4. Équation au nœud intérieur

Pour le point 2 :

$$h_3 - 2h_2 + h_1 = 0$$

Remplaçons :

$$5 - 2h_2 + 10 = 15 - 2h_2 = 0$$
$$2h_2 = 15 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{15}{2} = 7,5$$

#### Interprétation

- La variation est linéaire → typique d'un écoulement sans source
- Le gradient hydraulique est constant
- L'eau s'écoule de 10 m vers 5 m

## Exercice 2: Écoulement souterrain 2D en régime permanent

On considère un aquifère homogène en 2 dimensions (x, y) sans recharge.

Données :

- Domaine carré : 10 m×10 m
- Pas :  $\Delta x = \Delta y = 5$  m
- Conductivité hydraulique : constante
- Conditions aux limites :
  - Bord gauche :  $h = 10$  m
  - Bord droit :  $h = 5$  m
  - Bord haut et bas : variation linéaire

Déterminer la charge hydraulique au centre du domaine.

### Corrigé 2

#### 1. Équation de base (2D)

Sans recharge :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

#### 2. Discrétisation (schéma 2D)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

Donc

$$h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$

La valeur au point = moyenne des 4 voisins

#### 3. Maillage

Grille 3×3 :

- Les bords gauche = 10 m
- Les bords droit = 5 m
- Haut et bas → moyenne linéaire → 7.5 m

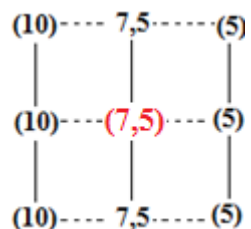
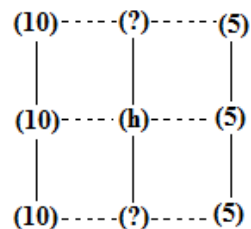
Donc :

#### 4. Équation au centre

Charge hydraulique ( $h$ ) au centre :

$$h = \frac{10 + 5 + 7,5 + 7,5}{4} = 7,5 \text{ m}$$

Écoulement de gauche (10 m) → droite (5 m)



#### Interprétation

- Écoulement de gauche (10 m) → droite (5 m)
- Distribution régulière
- Le centre prend la valeur moyenne des frontières

## B. Méthode des éléments finis (MEF)

L'objectif de la méthode est de résoudre numériquement les équations d'écoulement dans les milieux poreux (aquifères) en tenant compte de la complexité géométrique et de l'hétérogénéité.

### B.1 Domaines d'application :

- Gestion des ressources en eau.
- Modélisation de la pollution des nappes.
- Évaluation des impacts des pompes.

### B.2 Équations Fondamentales

#### B.2.a Loi de Darcy (1856)

$$q = -K\nabla h$$

- $q$  : Flux spécifique (vitesse de Darcy) [m/s].
- $K$  : Conductivité hydraulique (tenseur en milieux anisotropes) [m/s].
- $h = z + \frac{P}{\rho g}$  : Charge hydraulique [m].

#### B.2.b Équation de Continuité

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot q = Q$$

$S$  : Coefficient d'emménagement spécifique [1/m].

- $Q$  : Terme source/puits (e.g., recharge, pompage).

#### B.2.C Équation de la Nappe Phréatique

- Régime permanent :

$$\nabla \cdot (K\nabla h) = Q$$

- Régime transitoire :

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K\nabla h) + Q$$

### B.3 Principes de la Méthode MEF

#### B.3.a Discrétisation du Domaine

- **Maillage** : Division du domaine en éléments (triangles, quadrilatères en 2D ; tétraèdres en 3D).
- **Nœuds** : Points où la charge hydraulique  $h$  est calculée.
- **Adaptativité** : Raffinement local près des puits, failles, ou zones critiques.

#### B.3.b Fonctions de Forme

- Approximation de  $h$  dans un élément par des polynômes :

$$h(x, y) \approx \sum_{i=1}^n N_i(x, y) h_i$$

- $N_i$  : Fonctions de forme (linéaires, quadratiques).
- $h_i$  : Valeurs nodales de  $h$ .

### B.3.c Formulation Variationnelle

- Intégration de l'équation différentielle pondérée par une fonction test  $v$  :

$$\int_{\Omega} K \nabla h \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} Q v d\Omega + \text{Termes de bord.}$$

- **Théorème de Green** : Réduction de l'ordre des dérivées.

### B.3.d Assemblage du Système Matriciel

- **Matrice de rigidité** : Liée à  $K$  et aux gradients des fonctions de forme.
- **Matrice de masse** : Liée à  $S$  (en transitoire).
- **Vecteur de charge** : Termes sources et conditions aux limites.

### B.3.e Conditions aux Limites

- **Dirichlet** :  $h = h_0$  (c'est à dire niveau d'eau fixe).
- **Neumann** :  $-K \nabla h \cdot n = q$  (c'est à dire flux imposé).

## B.4 Résolution Numérique

### B.4.a Régime Permanent

- Système linéaire :

$$\mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{b}$$

### B.4.b Régime Transitoire

- Discrétisation temporelle :

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \mathbf{h}^n + \mathbf{b}^{n+1}$$

$\mathbf{M}$  : Matrice de masse.

## B.5 Cas Pratiques

### B.5.a Aquifères Non Confinés

- Équation non linéaire :

$$\nabla \cdot (K(h - z) \nabla h) = S_y \frac{\partial h}{\partial t}$$

$S_y$  : Porosité efficace.

### B.5.b Milieux Hétérogènes/Anisotropes

- Attribution de  $K$  variable spatialement (e.g., couches géologiques).
- Tenseur  $\bar{\bar{K}}$  :

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix}$$

## Exercices de la méthode des éléments finis

### Exercice 1 : Modélisation 1D d'un aquifère

On considère un aquifère captif homogène en 1D, discrétisé en **3 nœuds** ( $N_1, N_2, N_3$ ) et 2 éléments ( $E_1$  entre  $N_1-N_2$ ,  $E_2$  entre  $N_2-N_3$ ).

- Conductivité hydraulique :  $K = 10^{-4} \text{ m/s}$ .
- Épaisseur de l'aquifère :  $e = 10 \text{ m}$ .
- Conditions aux limites :
  - $N_1$  : Charge hydraulique fixée à  $h_1 = 20 \text{ m}$ .
  - $N_3$  : Flux nul (condition de Neumann :  $q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$ ).

#### 1<sup>ère</sup> partie

1. Calculez la matrice de conductivité globale  $K$ .
2. Appliquez les conditions aux limites.
3. Résoudre le système pour obtenir  $h_2$  et  $h_3$ .

#### 2<sup>ème</sup> partie

Si on introduit la condition de Dirichlet en  $N_3$  ( $h_3 = 10 \text{ m}$ ), on demande de :

4. Recalculer  $K$ .
5. Résoudre pour  $h_2$ .

### Corrigé 1

#### 1<sup>ère</sup> partie

##### Étape 1 : Matrices élémentaires

Pour chaque élément, la matrice de conductivité locale est :

$$K_E = \frac{K \cdot e}{\Delta x} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

- On suppose que la longueur des éléments :  $\Delta x = 50 \text{ m}$ .
- Calcul pour  $E_1$  et  $E_2$  :

$$K_{E1} = K_{E2} = \frac{10^{-4} \cdot 10}{50} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

##### Étape 2 : Assemblage de la matrice globale

La matrice globale  $K$  (3x3) s'assemble en superposant les contributions des éléments :

$$K = 2 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

##### Étape 3 : Application des conditions aux limites

→  $N_1$  ( $h_1 = 20 \text{ m}$ ) :

On fixe la première ligne à  $[1, 0, 0]$  et le terme source à 20.

→  $N_3$  (flux nul) :

La condition  $q = 0$  implique une dérivée nulle. On conserve la troisième ligne originale.

Système modifié :

$$h_1 = 20 \quad \text{éq. 1}$$

$$-2 \times 10^{-5}h_1 + 4 \times 10^{-5}h_2 - 2 \times 10^{-5}h_3 = 0 \quad \text{éq. 2}$$

$$-2 \times 10^{-5}h_2 + 2 \times 10^{-5}h_3 = 2 \times 10^{-5}(-h_2 + h_3) = 0 \quad \text{éq. 3}$$

#### Étape 4 : Résolution

1. De l'équation 3 :

$$-h_2 + h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = h_2$$

2. Substitution dans la 2<sup>ème</sup> équation :

$$-2 \times 10^{-5}(20) + 4 \times 10^{-5}h_2 - 2 \times 10^{-5}h_2 = 0 \Rightarrow -4 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-5}h_2 = 0$$

$$h_2 = \frac{4 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-5}} = 20 \text{ m}$$

3. Ainsi,

$$h_3 = h_2 = 20 \text{ m.}$$

#### Interprétation

Résultat cohérent avec un flux nul en  $N_3$  :

Le gradient hydraulique est nul, donc  $h_3 = h_2 = h_1$

#### 2<sup>ème</sup> partie

Le système devient :

$$h_1 = 20 \quad \text{éq. 1}$$

$$-2 \times 10^{-5}h_1 + 4 \times 10^{-5}h_2 - 2 \times 10^{-5}h_3 = 0 \quad \text{éq. 2}$$

$$h_3 = 10 \quad \text{éq. 3}$$

#### Exercice 2 : Modélisation 2D d'un aquifère hétérogène

On considère un aquifère hétérogène rectangulaire de dimensions sont :  $L = 100 \text{ m}$  ;  $H = 100$ .

En raison de son hétérogénéité, le domaine est divisé en 2 triangles :

Elément	Zone	Conductivité hydraulique
e1	Gauche	$K1 = 10^{-3} \text{ m/s}$
e2	Droite	$K2 = 5 \times 10^{-3} \text{ m/s}$

Nœud	Coordonnées		Conditions
	X	Y	
1	0	0	$h = 10 \text{ m}$
2	100	0	$h = 5 \text{ m}$
3	100	100	$h = 5 \text{ m}$
4	0	100	$h = 10 \text{ m}$

Maillage :

- Triangle 1 : (1, 2, 4) → zone 1
- Triangle 2 : (2, 3, 4) → zone 2

### 1. Équation de base

$$\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

### 2. Calcul des aires pour chaque triangle

$$A = \frac{1}{2} \times 100 \times 100 = 5000 \text{ m}^2$$

### 3. Matrice élémentaire

*Formule MEF :*

$$[K_e] = \frac{K}{4A} b_i b_j + c_i c_j$$

**Triangle 1 : (1, 2, 4)**

$$b_1 = y_2 - y_4 = 0 - 100 = -100$$

$$b_2 = y_4 - y_1 = 100 - 0 = 100$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = 0 - 0 = 0$$

$$c_1 = x_4 - x_2 = 0 - 100 = -100$$

$$c_2 = x_1 - x_4 = 0 - 0 = 0$$

$$c_3 = x_2 - x_1 = 100 - 0 = 100$$

*Matrice brute :*

$$B^T B = \begin{bmatrix} 20000 & -10000 & -10000 \\ -10000 & 10000 & 0 \\ -10000 & 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

*Matrice élémentaire :*

$$[K_1] = \frac{K_1}{4A} B^T B = \frac{10^{-3}}{20000} \times B^T B$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.0005 & -0.0005 \\ -0.0005 & 0.0005 & 0 \\ -0.0005 & 0 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

**Triangle 2 : (2, 3, 4)**

Coordonnées :

- 2 : (100,0), 3 : (100,100), 4 : (0,100)

**Résultat direct (symétrie) :**

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0.0005 & -0.00025 & -0.00025 \\ -0.00025 & 0.00025 & 0 \\ -0.00025 & 0 & 0.00025 \end{bmatrix}$$

#### 4. Assemblage global

Ordre des nœuds : (1, 2, 3, 4)

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.0005 & 0 & -0.0005 \\ -0.0005 & 0.001 & -0.00025 & -0.00025 \\ 0 & -0.00025 & 0.00025 & -0.00025 \\ -0.0005 & -0.00025 & -0.00025 & 0.001 \end{bmatrix}$$

#### 5. Conditions aux limites

On impose :

- $h_1 = h_4 = 10 \text{ m}$
- $h_2 = h_3 = 5 \text{ m}$

#### 6. Calcul du flux

Loi de Darcy :

$$\vec{q} = -K\nabla h$$

Gradient moyen :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{5 - 10}{100} = -0,05$$

Flux :

$$\text{Zone 1 : } q_1 = -K_1 \times (-0,05) = 5 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\text{Zone 2 : } q_2 = -K_2 \times (-0,05) = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$