

## CHAPITRE 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DE BASE DES ECOULEMENTS SOUTERRAINS

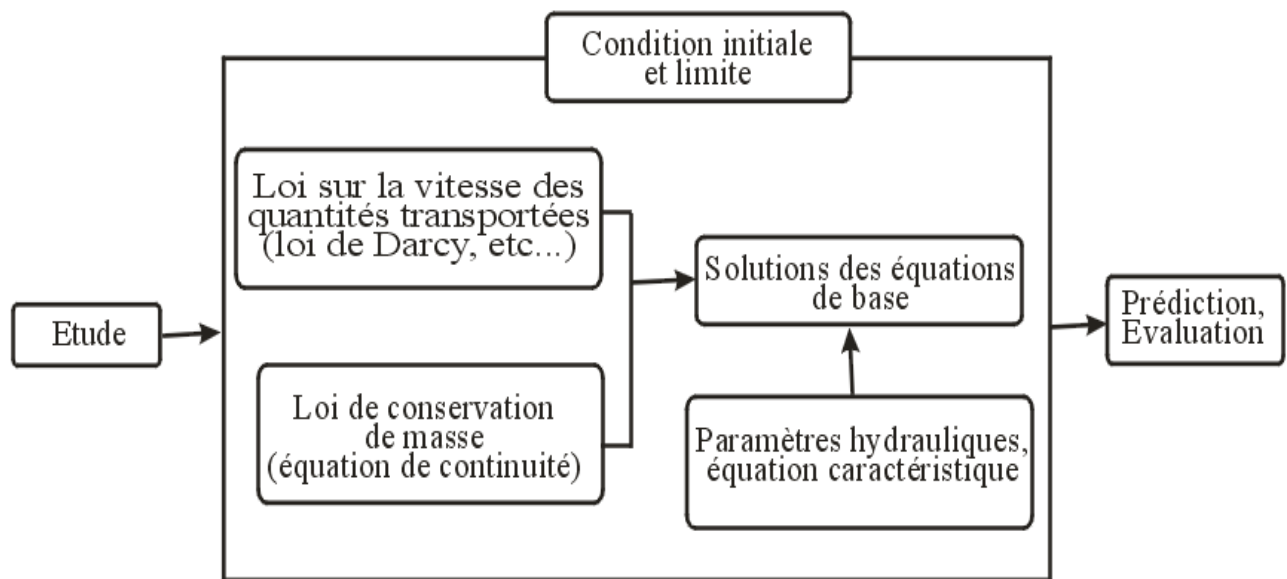
### 2.1 Méthodologie de l'approche hydraulique,

L'approche hydraulique des problèmes d'application sur le terrain se base sur:

1. la collecte et l'analyse de toutes les données existantes et de recherche sur la morphologie, la géologie, les conditions hydrologiques, et les conditions réelles des eaux souterraines.
2. les solutions sont obtenues à partir de la résolution des équations de transport (la loi de Darcy et la loi de Fick) et les équations de conservation (l'équation de continuité) pour les quantités transportées avec les conditions limites et initiales.

En général, soit des méthodes analytiques ou bien numériques sont appliquées à la morphologie, à la géologie et aux eaux souterraines modélisées pour résoudre les équations de base, qui sont écrites sous forme d'expression mathématique. Pour ce faire, les paramètres hydrauliques et les formules caractéristiques (telles que la perméabilité et le coefficient d'emménagement qui relie l'écoulement réel des eaux souterraines aux modèles mathématiques) doivent être déterminés.

Les résultats des analyses basées sur l'approche hydraulique sont appliqués pour comprendre l'état actuel de l'écoulement des eaux souterraines ainsi qu'à la prédiction et à l'évaluation de scénarios.



Approche hydraulique de l'écoulement des eaux souterraines

## 2.2 Lois de la vitesse de transport,

### 2.2.1 Loi de Darcy (1856)

**Fondement** : Relation entre le débit, le gradient hydraulique et les propriétés du milieu poreux.

$$\text{Équation : } Q = K \cdot A \cdot \frac{dh}{dl}$$

- $Q$  : Débit volumique ( $m^3/s$ ),
- $K$  : Conductivité hydraulique ( $m/s$ ),
- $A$  : Section transversale de l'écoulement ( $m^2$ ),
- $\frac{dh}{dl}$  : Gradient hydraulique (sans dimension).

**Vitesse de Darcy** (vitesse apparente) :

$$v = \frac{Q}{A} = -K \cdot \frac{dh}{dl}$$

### 2.2.2 Vitesse réelle de l'eau

La vitesse réelle ( $v_{réelle}$ ) dépend de la **porosité effective** ( $n_e$ ) :

$$v_{réelle} = \frac{v}{n_e}$$

- $n_e$  : Fraction des pores interconnectés participant à l'écoulement.

### 2.2.3 Transport par advection

Les particules d'eau (ou polluants) se déplacent à la vitesse réelle :

$$v_{adv} = v_{réelle}$$

*Exemple* : Dans un aquifère homogène avec  $n_e = 0,25$  et  $v = 1m/jour$  ,

$$v_{adv} = v_{réelle} = 4m/jour$$

### 2.2.4 Dispersion hydrodynamique

Phénomène combinant :

- **Dispersion mécanique** (hétérogénéités du milieu),
- **Diffusion moléculaire** (mouvement aléatoire des molécules).

**Coefficient de dispersion** :

$$D = \alpha \cdot v_{réelle} + D_m$$

- $D$  : Coefficient de dispersion ( $m^2/s$ ),
- $\alpha$  : Dispersivité (capacité du milieu à étaler un contaminant en raison des hétérogénéités, en m),
- $D_m$  : Coefficient de diffusion moléculaire ( $m^2/s$ ).

### 2.2.5 Équation d'advection-dispersion

Décrit le transport des solutés en milieu poreux :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \underbrace{-v_{réelle} \cdot \frac{\partial C}{\partial x}}_{\text{Advection}} + \underbrace{D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}_{\text{Dispersion}} \pm \text{Sources/Puits}$$

- $C$  : Concentration du soluté (mg/L),
- $t$  : Temps (s),
- $x$  : Distance (m).

### 2.2.6 Facteur de retard (R)

Pour les polluants adsorbés (ex : métaux lourds), la vitesse est réduite :

$$R = 1 + \frac{\rho_b \cdot K_d}{n_e}$$

- $\rho_b$  : Masse volumique du sol (kg/m<sup>3</sup>),
- $K_d$  : Coefficient de partage solide-eau (L/kg).

**Vitesse effective du polluant :**

$$v_{\text{polluant}} = \frac{v_{\text{réelle}}}{R}$$

*Exemple* : Si  $R=5$ , le polluant est 5 fois plus lent que l'eau.

#### **Exemple**

Un hydrocarbure ( $R=3$ ) s'infiltré dans un aquifère ( $K= 10^{-4}$  m/s ;  $n_e = 0,2$  sous un gradient  $\frac{dh}{dl} = 0,01$ ).

**Calculs :**

$$\begin{aligned} \text{Vitesse de Darcy : } v &= K \cdot \frac{dh}{dl} = 10^{-4} * 0,01 \\ &= 10^{-6} \text{ m/s } (\approx 0,086 \text{ m/jour}) \end{aligned}$$

$$\text{Vitesse réelle : } v_{\text{réelle}} = \frac{v}{n_e} = \frac{0,086}{0,2} = 0,43 \text{ m/jour}$$

$$\text{Vitesse du polluant : } v_{\text{polluant}} = \frac{v_{\text{réelle}}}{R} = \frac{0,43}{3} = 0,14 \text{ m/jour}$$

**Conclusion** : Le polluant mettra 71 jours pour parcourir 10 m.

## 2.3 Équations de base pour un écoulement d'eau souterraine saturé

Les équations de base pour l'écoulement d'eau souterraine saturé en régime permanent et transitoire reposent sur les lois de Darcy et sur le principe de conservation de la masse. Voici les principales formulations pour ces deux régimes :

La loi de Darcy relie le flux d'eau souterraine ( $\vec{q}$ , en m/s) au gradient hydraulique ( $\nabla h$ ) :

$$\vec{q} = -K\nabla h$$

Où :

- $K$  : conductivité hydraulique (en m/s),
- $h$  : charge hydraulique (en m), définie comme  $h = z + \frac{P}{\rho gh}$  (somme de la hauteur de pression et de l'élévation).

### 2.3.1 Écoulement en régime permanent

En régime permanent, les variations de la hauteur de la nappe phréatique  $h$  ne dépendent pas du temps. Autrement dit,  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ .

L'équation de base en régime permanent pour l'écoulement d'eau souterraine saturée, dans un aquifère homogène et isotrope, peut être dérivée de la loi de Darcy et est généralement formulée sous la forme de l'équation de Laplace :

$$\nabla \cdot (K\nabla h) = 0$$

Où :

- $h(x)$  est la hauteur de la nappe phréatique à la position  $x$ ,
- $K$  est la conductivité hydraulique de l'aquifère,
- $\nabla$  est l'opérateur de gradient.

Si l'on suppose un écoulement unidimensionnel, cette équation devient :

$$\frac{d}{dx} K \frac{dh}{dx} = 0$$

Cela implique que  $K \frac{dh}{dx}$  est constant, et on peut ensuite intégrer pour obtenir la solution de la hauteur de la nappe  $h(x)$  en fonction des conditions aux limites du problème.

### 2.3.2 Écoulement en régime transitoire (non permanent)

En régime transitoire, les variations de la hauteur de la nappe  $h$  dépendent du temps, c'est-à-dire  $\frac{dh}{dt} \neq 0$ . L'équation de base dans ce cas est obtenue en combinant la loi de Darcy avec la conservation de la masse, ce qui donne une forme de l'équation de diffusion pour un écoulement saturé.

L'équation de base pour un écoulement transitoire dans un aquifère homogène, isotrope, et à conductivité  $K$  est :

$$\frac{dh}{dt} = \nabla \cdot (K\nabla h) + W$$

Où :

- $h(x, t)$  est la hauteur de la nappe phréatique en fonction de la position  $x$  et du temps  $t$ ,
- $K$  est la conductivité hydraulique de l'aquifère,

- $W$  représente la source ou le puits de recharge/décharge de l'aquifère (par exemple, un puits qui pompe de l'eau ou une zone d'infiltration).

### Cas particulier en régime transitoire : L'équation de Boussinesq

Dans le cas d'un aquifère libre, on peut utiliser une version simplifiée de l'équation de diffusion, comme l'équation de Boussinesq, qui est applicable à des aquifères peu profonds. Elle modélise un écoulement non permanent mais unidimensionnel dans un aquifère à conductivité hydraulique homogène, en supposant que la variation piézométrique est faible.

L'équation de Boussinesq pour un aquifère libre en régime transitoire est la suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{S}{b} \frac{\partial h}{\partial x}$$

Où :

- $b$  est l'épaisseur de l'aquifère,
- $h(x, t)$  est la hauteur de la nappe,
- $S$  est la conductivité spécifique de l'aquifère.

### Interprétation de l'équation de Boussinesq :

- Le terme  $K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  représente la diffusion de l'eau dans l'aquifère.
- Le terme  $\frac{S}{b} \frac{\partial h}{\partial x}$  représente les effets de la pente de la nappe, c'est-à-dire le flux qui dépend du gradient de la hauteur de la nappe.

### Conditions aux limites et initiales

- **Conditions initiales** :  $h(x, 0) = h_0(0)$  , où  $h_0(0)$  est la hauteur initiale de la nappe.
- **Conditions aux limites** :
  - Si l'aquifère est confiné ou semi-confiné, des conditions de flux constant ou de pression constante peuvent être imposées aux bords.
  - Si l'aquifère est libre, on peut imposer des conditions de type flux de recharge ou décharge à la surface.

### Exemple : Équation de Boussinesq (aquifère libre)

Un aquifère libre avec  $K = 10^{-3}m$  et porosité de drainage  $S_y = 0,25$  a une épaisseur saturée initiale  $h_0 = 10 m$ . Après une période de sécheresse, recharge est nulle.

- Simplifier l'équation de Boussinesq en régime transitoire
- estimer le temps caractéristique de drainage.

### Correction :

1. Équation de Boussinesq :

$$\nabla \cdot (Kh \nabla h) = S_y \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$Kh \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = S_y \frac{\partial h}{\partial t}$$

En 1D et avec  $\nabla h = \frac{dh}{dx}$ , on a :

$$Kh \frac{d^2 h}{dx^2} = S_y \frac{dh}{dt}$$

2. **Temps caractéristique**

$$t = \frac{S_y * h_0}{K} = \frac{0,25 * 10}{10^{-3}} = 2500 \text{ secondes} \approx 41,7 \text{ minutes}$$

## 2.4 Solutions analytiques typiques des équations fondamentales,

Les solutions analytiques typiques des équations fondamentales en hydraulique souterraine sont essentielles pour comprendre le comportement des aquifères. Voici une synthèse organisée des principales solutions :

### 2.4.1. Loi de Darcy (1856)

- Équation :

$$Q = -KA \frac{dh}{dx}$$

Où  $Q$  est le débit,  $K$  la conductivité hydraulique,  $A$  la section transversale, et  $\frac{dh}{dx}$  le gradient hydraulique.

### 2.4.2. Équation de l'écoulement souterrain

- Forme générale :

$$S_S \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h)$$

- Cas stationnaire : Équation de Laplace  $\nabla^2 = 0$ .

### 2.4.3. Solutions en régime permanent

#### a. Solution de Thiem (1906) – Aquifère captif

- Équation :

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r}$$

Où  $s$  est le rabattement,  $[L]$

Transmissivité  $T$   $[L^2/t]$  ( $T = Kb$ )

$R$  Rayon d'influence,  $[L]$

$r$  Distance au puits  $[L]$ .

**Hypothèses** : Aquifère homogène, isotrope, puits pénétrant totalement.

#### b. Solution de Dupuit-Forchheimer – Aquifère libre

- Équation :

$$h^2 = h_0^2 - \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R}{r}$$

Où  $h$  est la charge hydraulique à la distance  $r$ .

- **Hypothèses** : Néglige les composantes verticales de l'écoulement.

### 2.4.4. Solutions transitoires

#### a. Solution de Theis (1935) – Aquifère captif

- Équation :  $s(r) = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$  avec  $u = \frac{r^2 S}{4Tt}$

### **b. Approximation de Cooper-Jacob (1946)**

Lorsque le temps est suffisamment long, le paramètre  $u$  devient petit (c'est-à-dire que  $u \rightarrow 0$  à mesure que  $t$  augmente), ce qui permet de simplifier l'expression de  $W(u)$ .

Dans cette situation, on utilise l'approximation suivante pour la fonction  $W(u)$ :

$$W(u) \approx -\ln(u) - 0,5772 \quad (\text{pour } u \text{ petit, } u \ll 1)$$

Ce qui simplifie l'expression de l'abaissement de la tête  $\Delta h(r, t)$  en une plus simple, ce qui est plus facile à calculer. En remplaçant  $u$  par son expression et  $W(u)$  par son approximation, l'abaissement de la tête devient :

$$\Delta s = \frac{Q}{4\pi T} - \frac{r^2 S}{4Tt} - 0,5772$$

## 2.5 Écoulement d'eau souterraine dans les masses rocheuses

L'eau souterraine dans les massifs rocheux ne s'écoule pas comme dans les sédiments sableux ou graveleux. Les roches sont souvent :

- Très peu poreuses (porosité totale faible)
- Fissurées ou fracturées, ce qui contrôle l'écoulement réel
- Anisotropes, la conductivité varie selon les directions des fractures

L'écoulement dans ces contextes est dominé par la fracturation, la diaclase, et la minéralisation des fissures.

Un aquifère fissuré est une formation géologique où l'eau circule principalement à travers des fractures, failles ou fissures interconnectées. Ces aquifères sont typiques des roches cristallines (granite, basalte) ou sédimentaires compactes (calcaires, grès).

- Double porosité :
  - Fractures : Perméabilité élevée, écoulement rapide.
  - Matrice rocheuse : Stockage lent, perméabilité faible (ex : granite).
- Anisotropie : La perméabilité dépend de la direction des fractures.
- Hétérogénéité : Variabilité spatiale des propriétés hydrauliques (densité, ouverture des fractures).

### 2.5.1 Modèle à double porosité (Modèle de Warren-Root)

Le modèle de Warren-Root est un cadre théorique essentiel pour comprendre l'écoulement de l'eau souterraine dans les massifs rocheux fracturés, en particulier ceux où les fractures sont bien connectées et la matrice rocheuse est peu perméable. Ce modèle a été proposé par J. E. Warren et P. J. Root en 1963 et est largement utilisé pour la modélisation des aquifères fissurés et karstiques.

Le massif rocheux est représenté comme une combinaison de deux sous-systèmes hydrauliquement distincts :

#### 1. Les fractures

- Constituent le réseau de conduction principal.
- L'écoulement y est rapide et souvent dirigé le long des plans de fracture.
- Volume de stockage limité comparé à la matrice.

#### 2. La matrice rocheuse

- Massif de roche compacte avec porosité très faible.
- Stocke l'eau mais contribue peu à l'écoulement direct.
- L'eau de la matrice s'échange lentement avec le réseau de fractures.

Le modèle de Warren-Root repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices :

1. **Homogénéité statistique** : les fractures sont distribuées uniformément dans le massif.
2. **Écoulement laminaire dans les fractures** : les fractures se comportent comme des canaux rectilignes, et Darcy peut être appliqué.
3. **Échange linéaire matrice-fracture** : le débit d'eau de la matrice vers les fractures est proportionnel à la différence de charge hydraulique.

4. **Matrice imperméable à l'écoulement direct** : l'écoulement horizontal dans la matrice est négligeable par rapport aux fractures.
5. **Conditions initiales et frontières** : souvent supposées simples (charges ou flux imposés, aquifère infini).

Le modèle utilise des équations couplées pour décrire les variations de charge hydraulique dans le temps :

**a. Équation pour les fissures**

$$\nabla \cdot (K_f \nabla h_f) = S_f \frac{\partial h_f}{\partial t} + \frac{\sigma K_m}{L^2} (h_m - h_f)$$

- $K_f$  Conductivité hydraulique des fissures
- $h_f$  Charge hydraulique dans les fissures
- $S_f$  Coefficient de stockage des fissures
- $\sigma$  Facteur de forme (géométrie des blocs matriciels)
- $L$  Longueur caractéristique des blocs matriciels
- $K_m$  Conductivité hydraulique de la matrice
- $h_m$  Charge hydraulique dans la matrice

**b. Équation pour la matrice**

$$S_m \frac{\partial h_m}{\partial t} = \frac{\sigma K_m}{L^2} (h_m - h_f)$$

- $S_m$  Coefficient de stockage de la matrice

Le terme de transfert  $\frac{\sigma K_m}{L^2} (h_m - h_f)$  représente l'échange de fluide entre la matrice et les fissures, proportionnel à la différence de charge.

**2.5.2 Modèle de réseau de fractures discrètes**

Les fractures sont modélisées explicitement comme des éléments de dimension inférieure (ex.: plans 2D dans un milieu 3D). L'écoulement dans chaque fracture suit la loi de Darcy, avec conservation de la masse aux intersections.

- **Écoulement dans une fracture individuelle :**

$$\nabla \cdot (T_f \nabla h_f) = S_f \frac{\partial h_f}{\partial t} + Q$$

- $T_f = K_f \cdot b$  Transmissivité de la fracture ( $b$  = ouverture).
- $Q$  Terme source/puits ou échangé avec matrice.

**Couplage aux intersections :**

Continuité de la charge hydraulique et du flux imposée aux intersections de fractures.

**2.5.3 Modèle de milieu continu équivalent**

Le milieu fissuré est traité comme un milieu poreux homogène avec des propriétés effectives. L'équation classique de l'écoulement souterrain s'applique :

$$\nabla \cdot (K_{eff} \nabla h_f) = S_{eff} \frac{\partial h}{\partial t}$$

- $K_{eff}$  Conductivité hydraulique effective
- $h$  Coefficient de stockage effectif

### Exercice

#### Énoncé

Un massif rocheux est composé de fractures et d'une matrice poreuse. On a :

Stockage spécifique des fractures :  $S_f = 5 \cdot 10^{-3} m^{-1}$

Stockage spécifique de la matrice :  $S_m = 1 \cdot 10^{-4} m^{-1}$

Conductivité des fractures :  $k_f = 1 \cdot 10^{-4} m/s$

Coefficient d'échange matrice-fracture :  $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} s^{-1}$

Différence initiale de charge :  $h_m - h_f = 3 m$

1. Calculez le débit spécifique
2. Déterminez le temps caractéristique  $t_c$  pour que la matrice perde la moitié de sa charge initiale vers les fractures.

#### Corrigé

1. Calcul du débit spécifique

Le débit d'échange est donné par :

$$q_{mf} = \alpha(h_m - h_f)$$

$$q_{mf} = 2 \cdot 10^{-5} * 3 = 6 \cdot 10^{-5} m/s$$

Interprétation : l'eau s'écoule lentement de la matrice vers les fractures, contribuant à l'écoulement à long terme.

2. Déterminez le temps caractéristique  $t_c$

Pour un transfert linéaire matrice-fracture :

$$\frac{dh_m}{dt} = -\frac{\alpha}{S_m}(h_m - h_f)$$

Temps caractéristique :  $t_c \approx \frac{S_m}{\alpha}$

$$t_c = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-4}} = 5 s$$

Ici, la constante est petite car les valeurs sont théoriques. Pour des cas réels,  $t_{ct}$  est souvent de l'ordre d'heures à jours