CHAPITRE II :

SOLUTIONS DES SYSTEMES LINEAIRES

ET EXERCICES CORRIGES

Soit un système de n équations avec n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

On va mettre le système (1) sous forme matricielle : (les matrices se présentent avec des crochets [ ] ou des parenthèses ( ))

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Donc la forme matricielle de (1) s'écrit :

$$AX = B \qquad (2)$$

les matrices

X *et* B **sont des matrices colonnes parce qu'elles contiennent une seule colonne**

La matrice A est une matrice de dimension *n* (parce qu'elle contient n lignes et n colonnes, les éléments sont notés a_{ij} , *i* est le numéro de la ligne et *j* le numéro de la colonne).

Exemple : a_{45} ; cet élément se trouve dans la ligne 4 est la colonne 5 .

1. Méthode de Cramer

Si la matrice A est régulière (déterminant de la matrice est différent de zéro , $\text{dét}A = 0$), alors la solution du système (1) s'écrit :

$$X = A^{-1}B \qquad (3)$$

Ou bien : $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$ (4)

où les déterminants Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont obtenus du déterminant $\text{dét}A$ remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne la matrice-colonne B (les matrices A *et* X sont des matrices colonnes parce qu'elles contiennent une seule colonne).

2. Méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer le système (2) en un système équivalent $A'X = B'$ où A' est une matrice triangulaire supérieure, la résolution de ce dernier système est immédiate.

3. Méthode de Choleski

Si la matrice A du système (1) est définie positive, alors la matrice A peut être décomposée en produit de deux matrices triangulaires T et R des structures différentes (inférieure et supérieure). Dans ce cas le système (2) s'écrit :

$$(TR)\,X = B \;\; ou\, T(RX) = B$$

Ainsi la résolution du système (1) se réduit à la résolution de deux systèmes $= Y \;\; et\, TY = B$. La résolution de ces deux derniers système est immédiate, car les matrices $T\; et\; R$ sont triangulaires.

4. Méthode des approximations successives

Lorsque le nombre des inconnues d'un système linéaire est grand, les méthodes 1-4 qui donnent une solution exacte devient trop compliquée. Dans ces conditions il devient plus commode de trouver les racines du système par des méthodes numériques approchées. L'une d'elle est la méthode des approximations successives dite aussi méthode des itérations.

Soit le système (1) avec la forme matricielle (2). Supposons que les coefficients diagonaux a_{ii} $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont différents de zero. On résout la première équation du système (1) par rapport à x_1, la deuxième par rapport à x_2 , etc. On obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n \\ x_2 = d_2 + c_{21}x_1 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_n = d_n + c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{cases} \qquad (5)$$

Où $d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$; $c_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}$; pour $i \neq j\; et\; c_{ij} = 0 \;\; pour\; i = j \;\; (i,\; j = 1, 2, \dots, n)$.

Introduisons les matrices :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad et \;\; D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

Pour mettre le système 5 sous la dorme matricielle

$$X = D + CX \qquad (6)$$

Le système (5) ou (6) est appelé système commode pour itération.

Cherchons la solution du système (5) par la méthode des approximations successives. Prenons par exemple, pour approximation initiale la colonne des termes constants $X^{(0)} = D$. Puis construisons successivement les matrices colonnes :

$$\begin{cases} X^{(1)} = D + CX^{(0)} \quad (la\; première\; approximation) \\ X^{(2)} = D + CX^{(1)} \quad (la\; deuxime\; approximation) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ X^{(k+1)} = D + CX^{(k)} \quad (la\;\; (k+1) - ième\;\; approximation) \end{cases} \qquad (7)$$

Théorème 1 : Le processus itérative (7) d'un système linéaire réduit (6) converge vers une solution unique si l'une quelconque des normes canonique (m, l , ou k-normes) de la matrice C est inférieure à l'unité. La convergence du processus ne dépend pas du choix de l'approximation initiale. D'ici on obtient une condition suffisante pour la convergence du processus itérative d'un système linéaire de la forme matricielle (2) , à savoir :

Si la matrice A est une matrice à diagonale dominante , c'est-à-dire , si pour chaque ligne (colonne) , l'élément de la diagonale domine la somme des autres éléments de la ligne (colonne) en valeurs absolues, alors le processus itératif (7) converge vers la solution unique de c

Système, quel que soit le choix de l'approximation initiale.

Notons que, le processus itératif convergent jouit de la propriété importante d'autocorrection , qui fait qu'une erreur de calcul isolée n'entache pas le résultat final, une approximation erronée pouvant être considérée comme un nouveau vecteur initial.

Pour estimer l'erreur des approximations du processus itératif on utilise les formules suivantes :

$$\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}\right\| \leq \frac{\|\boldsymbol{c}\|}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{c}\|}\left\|\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}-\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}\right\| \qquad (8)$$

Ou bien $\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}\right\| \leq \frac{\|\boldsymbol{c}\|^{\boldsymbol{k}}}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{c}\|}\left\|\boldsymbol{X}^{(\mathbf{1})}-\boldsymbol{X}^{(\mathbf{0})}\right\|$ (9)

Dans ce cas, si au cours des calculs il s'avère que :

$$\left\|\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}-\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}\right\| \leq \frac{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{c}\|}{\|\boldsymbol{c}\|}\,\boldsymbol{e}$$

Ou $\boldsymbol{e}$ est la précision voulue, on aura :

$\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}\right\| \leq \boldsymbol{e}$ et par suite $\left|\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{k})}\right| < e \; (i = 1, \dots, n)$

En particulier, si on choisis $\boldsymbol{X}^{(\mathbf{0})} = \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{alors\ la\ formule\ (9) devient}$:

$$\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})}\right\| \leq \frac{\|\boldsymbol{c}\|^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{c}\|}\|\boldsymbol{D}\| \qquad (10)$$

A l'aide de la formule (10) on peut estimer le nombre $\boldsymbol{k}$ des itérations, nécessaire pour obtenir la première donnée $\boldsymbol{e}$

$$\|\boldsymbol{c}\|^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}} \leq \frac{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{c}\|}{\|\boldsymbol{D}\|}\,\boldsymbol{e} \qquad (11)$$

5. Méthode de Seidel

La méthode de Seidel est une modification de la méthode des approximations successives. Son idée consiste à tenir compte, lors du calcul de la $(k+1)-ième$ approximation de l'inconnue $\boldsymbol{x_i}$, des $(k+1)-ième$ approximations des inconnues $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2},\ldots,$ $\boldsymbol{x_{i-1}}$ déjà établies.

Soit le système réduit (5) . Choisissons arbitrairement les approximations initiales de la solution du système donné :

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \ldots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

En tenant compte, qu'elle correspond dans une certaine mesure aux inconnus cherchés

$\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2},\ldots,$ $\boldsymbol{x_n}$.

Ensuite , en supposant que les $(k+1)-ième$ approximations $x_i^{(k)}$ $(i=1,\ldots,n)$ sont des inconnues , nous construisons suivant Seidel les $(k+1)-ième$ approximations de la solution d'après les formules suivantes :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = d_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} \\ x_1^{(k+1)} = d_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} c_{2j} x_j^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^{(k+1)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = d_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)} \quad (k=1,2,\ldots) \end{cases} \tag{12}$$

Notons que le théorème de convergence pour la méthode des approximations successives reste valable pour la méthode de Seidel. La méthode de Seidel assure une meilleure convergence que la méthode itérative simple, mais généralement son application est plus plus délicate.

Exercices résolus :

Exercice N°1 :

Soit le système des équations linéaires :

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x_1 + \quad + x_3 = 1} \\ \boldsymbol{-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3} \end{cases}$$

a) Ecrire la forme matricielle de ce système et le résoudre à l'aide de la matrice inverse.
Posons :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La forme matricielle s'écrit : $\boldsymbol{AX = B}$

La solution de ce système à la forme :
(on multiplie $\boldsymbol{AX = B}$ à gauche par $\boldsymbol{A^{-1}}$ et $\boldsymbol{A^{-1}A = 1}$) $\longrightarrow$ $\boldsymbol{A^{-1}A\,X = A^{-1}B}$
D'où on trouve $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$ où $\boldsymbol{A^{-1}}$ est la matrice inverse de $\boldsymbol{A}$
En utilisant la méthode du calcul d'une matrice inverse:

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}'}{|A|} = \frac{\boldsymbol{adjointe\ de\ A}}{\boldsymbol{d\acute{e}terminant\ de\ A}}$$

On calcule tout d'abord déterminant de A :

$$\boldsymbol{d\acute{e}tA = |A| = +3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =}$$

$\boldsymbol{= +3 \times [(2 \times -4) - (1 \times 1)] + 0 \times [(-1 \times -4) - (1 \times 1)] - 0[(-3 \times -4) - (1 \times 1)] + 1 \times [(-1 \times 1) - (1 \times 2)] = -30}$

$$\boldsymbol{|A| = -30 \neq 0}$$

$\boldsymbol{donc\ la\ matrice\ inverse\ existe\ puisque\ le\ d\acute{e}terminant\ est\ diff\acute{e}rent\ de\ 0}$.

Calcul de l'adjointe de A, notée $\boldsymbol{\widetilde{A}'}$:

$$\boldsymbol{\widetilde{A}' = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{bmatrix}}$$

$\boldsymbol{M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}\ \ sont\ les\ cofacteurs\ de\ la\ matrice\ A}$
Puisque la matrice A est de dimension 3 (3 lignes et 3 colonnes) Il y a donc 9 cofacteurs à calculer .

Calcul des cofacteurs de la matrice A :
Pour calculer $\boldsymbol{M_{11}: on\ suprime\ de\ la\ matrice\ A\, , la\ ligne\ 1\ et\ la\ colonne\ 1}$:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & 2 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & -4 \end{bmatrix}}$$, les éléments qui restent de la matrice A :

$\boldsymbol{+M_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}$=(2× $\boldsymbol{-4) - (1 \times 1) = -9}$
Pour calculer $\boldsymbol{M_{12}: on\ suprime\ \ de\ la\ matrice\ A\, , la\ ligne\ 1\ et\ la\ colonne\ 2}$

$$A=\begin{bmatrix}\cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{1}\\ -1 & \cancel{2} & 1\\ 1 & \cancel{1} & -4\end{bmatrix}$$

$$-M_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-3$$

Pour calculer M_{13}: *on suprime la ligne* 1 *et la colonne* 3, *il reste donc*:

$$A=\begin{bmatrix}\cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{1}\\ -1 & 2 & \cancel{1}\\ 1 & 1 & \cancel{-4}\end{bmatrix}$$

$$+M_{13}=+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=+(-3)=-3$$

Calcul de M_{21} *on suprime de la matrice* A , *la ligne* 2 *et la colonne* 1 , *il reste de*

$$A=\begin{bmatrix}\cancel{3} & 0 & 1\\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{1}\\ \cancel{1} & 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$-M_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-(-1)=+1$$

Calcul de

M_{22}, *on suprime de la matrice* A, *la ligne* 2 *et la colonne* 2, *il reste de* A: ,

$$A=\begin{bmatrix}3 & \cancel{0} & 1\\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{1}\\ 1 & \cancel{1} & -4\end{bmatrix}\quad \text{donc } +M_{22}=+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=+(-12-1)=-13$$

Calcul de M_{23} , *on supprime de* A *la ligne* 2 *et la colonne* 3, *il reste de* A:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & \cancel{1}\\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{1}\\ 1 & 1 & \cancel{-4}\end{bmatrix}$$

$$-M_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(3-0)=-3$$

Calcul de M_{31}, on supprime de A la ligne 3 et la colonne 1 :

$$A=\begin{bmatrix}\cancel{3} & 0 & 1\\ \cancel{-1} & 2 & 1\\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-4}\end{bmatrix}\quad \text{donc } +M_{23}=+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2$$

Calcul de M_{32} , on supprime de A la ligne 3 et la colonne 2 :

$$A=\begin{bmatrix}3 & \cancel{0} & 1\\ -1 & \cancel{2} & 1\\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-4}\end{bmatrix}$$

$$-M_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(3-(-1))=-4$$

Calcul de M_{33}, on supprime de A, la ligne 3 et la colonne 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \cancel{1} \\ -1 & 2 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-4} \end{bmatrix}$$

$$+M_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = +6$$

$$\textit{Donc les valeurs des cofacteurs calculés sont}:$$

$$M_{11} = -9\,.\,M_{12} = -3\,;\; M_{13} = -3$$

$$M_{21} = 1\,;\; M_{22} = -13\,;\, M_{23} = -3$$

$$M_{31} = -2\,;\; M_{32} = -4\,;\; M_{33} = 6$$

$$\textit{Adjointe de } A = \widetilde{A}' = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & -2 \\ -3 & -13 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice inverse A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -9 & 1 & -2 \\ -3 & -13 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Donc : d'après $X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};\quad A^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -9 & 1 & -2 \\ -3 & -13 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -9 & 1 & -2 \\ -3 & -13 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} (-9 \times 1) + (1 \times 2) + (-2 \times 3 \\ (-3 \times 1) + (-13 \times 2) + (-4 \times 3) \\ (-3 \times 1) + (-3 \times 2) + (6 \times 3) \end{bmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -13 \\ -41 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/30 \\ 41/30 \\ -9/30 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/30 \\ 41/30 \\ -9/30 \end{bmatrix} \quad d'\text{où} \quad x_1 = \frac{13}{30}\;;\; x_2 = \frac{41}{30}\;;\; x_3 = \frac{-9}{30} = \frac{3}{10}$$

Exercice 2 :

Résoudre le système

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

par la méthode des approximations successives avec trois décimales exactes (c'est-à-dire 3 chiffres après la virgule) . En prenant la précision $e = 0.5 \times 10^{-3}$.

La matrice du système est $A = \begin{bmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{bmatrix}$

Les éléments diagonaux de la matrice A sont : $a_{11} = 4$; $a_{22} = 3$; $a_{33} = 4$

La matrice A donnée est une matrice à diagonale dominante car :

$$a_{11} = 4 > 0.24 + |-0.08| = 0.32$$
$$a_{22} = 3 > 0.09 + |-0.15| = 0.24$$
$$a_{33} = 4 > 0.04 + |-0.08| = 0.12$$

Donc , le processus itératif de cette méthode est convergent.

Mettons ce système sous la forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0.06x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 + 0.05x_3 \\ x_3 = 5 - 0.01x_2 + 0.02x_3 \end{cases}$$

Ou bien sous la forme matricielle : $X = D + CX$

Avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} \; ; \; D = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \mathbf{5} \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ \mathbf{-0.01} & \mathbf{0.02} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Pour les approximations initiales de la solution du système donné on prend :

$$X^{(0)} = D \;,\; c'est\grave{a}\;dire\;\; x_1^{(0)} = 2 \;;\; x_2^{(0)} = 3 \;;\; x_3^{(0)} = 5$$

En portant ces valeurs dans les seconds membres de la forme réduite, on obtient les premières approximations de la solution :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 2 - 0.06 \times 3 + 0.02 \times 5 = 1.92 \\ x_2^{(1)} = 3 - 0.03 \times 2 + 0.05 \times 5 = 3.19 \\ x_3^{(1)} = 5 - 0.01 \times 2 + 0.02 \times 3 = 5.04 \end{cases}$$

Ensuite, en portant les approximations trouvées dans la forme réduite du système, on obtient les deuxièmes approximations de la solution :

$$x_1^{(2)} = 1.9094 \;\;;\; x_2^{(2)} = 3.1944 \;;\; x_3^{(2)} = 5.0446$$

(les calculs sont effectués avec un chiffre significatif de réserve !!!)

Après une nouvelle substitution, on obtient les troisième approximations de la solution du système donné :

$$x_1^{(2)} = 1.9094 \;\;;\; x_2^{(2)} = 3.1944 \;;\; x_3^{(2)} = 5.0446$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 2 - 0.06 \times 3.1944 + 0.02 \times 5.0446 = 1.9092 \\ x_2^{(3)} = 3 - 0.03 \times 1.9094 + 0.05 \times 5.0446 = 3.19495 \\ x_3^{(3)} = 5 - 0.01 \times 1.9094 + 0.02 \times 3.1944 = 5.0448 \end{cases}$$

$x_1^{(3)} = 1.9092 \; ; \; x_2^{(3)} = 3.19495 \; ; \; x_3^{(3)} = 5.0448$

~~La quatrième approximation~~ : Cette itération n'est pas nécessaire puisque les résultats des $x_1^{(3)} \; ; \; x_2^{(3)} \; ; x_3^{(3)} \; et \; x_1^{(4)} \; ; \; x_1^{(4)} \; ; \; x_1^{(4)}$ sont identiques.

$$\begin{cases} \cancel{x_1^{(4)} = 2 - 0.06 \times 3.19495 + 0.02 \times 5.0448 = 1.9092} \\ \cancel{x_2^{(4)} = 3 - 0.03 \times 1.9092 + 0.05 \times 5.0448 = 3.1949} \\ \cancel{x_3^{(4)} = 5 - 0.01 \times 1.9092 + 0.02 \times 3.19495 = 5.0448} \end{cases}$$

$\cancel{x_1^{(4)} = 1.9092 \; ; \; x_2^{(4)} = 3.1949 \; ; \; x_3^{(4)} = 5.0448}$

Pour estimer le résultat obtenu, on utilise la formule (8) du cours qui est la suivante :
$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq e$ (ou e est la précision)
Nous avons la précision $e = 0.5 \times 10^{-3}$:

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |1.9092 - 1.9094| = 0.0002 < 0.5 \times 10^{-3}$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |3.19495 - 3.1944| = 0.0005 < 0.5 \times 10^{-3}$$
$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |5.0448 - 5.0446| = 0.0002 < 0.5 \times 10^{-3}$$

Donc, la solution du système donné avec trois décimales exactes est :

$$x_1 = 1.909 \pm 0.001 \quad ; \quad x_2 = 3.194 \pm 0.001 \quad ; \; x_3 = 5.045 \pm 0.001$$

<u>Exercice N°3 :</u>

Résoudre par la méthode de Seidel le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{bmatrix}$$

Prendre pour approximation initiale :

$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, c'est-à-dire $x_1^{(0)} = 1.2 \; ; \; x_2^{(0)} = 0 \; ; \; x_3^{(0)} = 0$ et obtenir la solution avec quatre décimales exactes.

Comme la matrice de ce système est une matrice diagonale dominante (car les coefficients diagonaux 10 , 10 et 10 dominent nettement ici les autres coefficients des inconnues) , alors le processus itératif converge et ne dépend pas du choix de l'approximation initiale.

Ramenons le système à la forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3 \\ x_1 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2 \end{cases}$$

L'approximation initiale est $x_1^{(\mathbf{0})} = \mathbf{1.2} \quad ; \quad x_2^{(\mathbf{0})} = 0 \ \ et \quad x_3^{(\mathbf{0})} = 0$

En appliquant successivement le processus de Seidel, on a :

Première approximation :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \times 0 - 0.1 \times 0 = 1.2 \\ x_2^{(1)} = 1.3 - \mathbf{0.2} \times \mathbf{1.2} - 0.1 \times 0 = 1.06 \\ x_3^{(1)} = 1.4 - \mathbf{0.2} \times \mathbf{1.2} - \mathbf{0.2} \times \mathbf{1.06} = 0.948 \end{cases}$$

Deuxième approximation :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \times 1.06 - 0.1 \times 0.948 = 0.9992 \\ x_2^{(2)} = 1.3 - \mathbf{0.2} \times \mathbf{0.9992} - 0.1 \times 0.948 = 1.00536 \\ x_3^{(2)} = 1.4 - \mathbf{0.2} \times \mathbf{0.9992} - \mathbf{0.2} \times \mathbf{1.00536} = 0.999098 \end{cases}$$

Les résultats du calcul avec quatre décimales exactes sont portés dans le tableau suivant :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2000	0.0000	0.0000
1	1.2000	1.0600	0.9480
2	0.9992	1.0054	0.9992
3	0.9996	1.0001	1.0001
4	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000

Comme dans les deux dernières itérations les résultats coïncident avec quatre décimales exactes , alors la solution du système donné est égale à :

$$\boldsymbol{x_1 = 1.0000 \pm 0.0001} \quad ; \quad \boldsymbol{x_2 = 1.0000 \pm 0.0001} \quad ; \quad \boldsymbol{x_3 = 1.0000 \pm 0.0001}$$

Remarque : la solution exacte du système donné est : $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = 1.0000}$